Sobre convergencia al valor en la frontera para las ecuaciones del Calor y de Poisson y operadores maximales

S.I. Hartzstein, J.L. Torrea, B. Viviani

June 24, 2011

Resumen

Obtenemos condiciones necesarias y suficientes sobre un peso $v > 0, c.t.p.$ para que

$$\lim_{t\to 0} W_t * f(x) = f(x) \ y \lim_{t\to 0} P_t * f(x) = f(x) \ \text{ a.e. } x,$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n, v)$, donde $\{W_t\}_{t>0}$ y $\{P_t\}_{t>0}$ son los semigrupos del calor y de Poisson

Contenidos

1 Introducción

2 Teoremas

Problemas clásicos en el semiplano superior:

$$(A)\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\Delta_x u(x,t)\\ \\ u(x,0) = f(x)\end{cases} \qquad (B)\begin{cases}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = -\Delta_x w(x,t)\\ \\ w(x,0) = f(x),\end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Las soluciones de (A) y (B) pueden describirse mediante los semigrupos del calor y de Poisson.

Si, por ejemplo, $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ y $1 \le p < \infty$,

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy = W_t * f(x), \qquad t > 0, \tag{1.1}$$

y

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y)dy = P_t * f(x), \qquad t > 0, \tag{1.2}$$

$W(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$, $W_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} W(t^{-\frac{1}{2}} x)$,

$P(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ y $P_t(x) = t^{-n} P(t^{-1} x)$.

Además,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \qquad y \qquad \lim_{t\to 0} w(x,t) = f(x)$$

en casi todo x.

El problema de la convergencia en c.t.p. está relacionado con el de
encontrar desigualdades en norma con pesos para los operadores maximales

$$f \to W^*f(\cdot) = \sup_{t>0} W_t * f(.) \qquad \text{y} \qquad f \to P^*f(.) = \sup_{t>0} P_t * f(.).$$

o, más precisamente, con el problema de
encontrar los pesos v para los que existe un peso u tal que

$$W^* : L^p(v) \to L^p(u) \qquad \text{y} \qquad P^* : L^p(v) \to L^p(u),$$

estén acotados.

Antecedentes

Carleson y Jones, Gatto y Gutiérrez, Rubio de Francia en los 80's estudiaron estos y otros problemas relacionados. También fueron considerados por W-S. Young (1982), Harboure, Macias y Segovia (1984), y Kerman and Sawyer (1989). Más recientemente hay un trabajo de Damek, Garrigós, Harboure y Torrea (2006).

Los núcleos del calor y de Poisson son radiales, decrecientes e integrables entonces están dominados por la maximal de Hardy-Littlewood M:

$$\Phi^* f(x) = \sup_t |\phi_t * f(x)| \leq CMf(x) = C \sup_{t>0} \frac{1}{t^n} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy,$$

entonces la convergencia en casi todo punto puede deducirse de desigualdades en norma pesada para M.
Por ejemplo, si $v \in A_p$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n, v)$, $1 \leq p < \infty$, entonces los límites existen.
Sin embargo, esta condición no es necesaria.

Las condiciones necesarias y suficientes que encontramos para la existencia de los límites son fáciles de verificar:
Existe $t_0 > 0$ tal que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} W_{t_0}^{p'}(y) v^{-\frac{p'}{p}}(y) dy < \infty \qquad \text{y} \qquad 0 < \int_{\mathbb{R}^n} P_{t_0}^{p'}(y) v^{-\frac{p'}{p}}(y) dy < \infty.$$

Estas condiciones están relacionadas con el reemplazo de los operadores maximales por **versiones locales** de ellos:

$$f \to W_R^* f(.) = \sup_{0<t<R} |W_t * f(.)| \qquad \text{y} \qquad f \to P_R^* f(.) = \sup_{0<t<R} |P_t * f(.)|.$$

Respecto de la maximal de H-L: Resultados obtenidos en los 80's por J.L. Rubio de Francia e, independientemente [RdF] y L. Carleson and P. Jones [C-J]:

TEOREMA

Sean v un peso y $1 < p < \infty$.
Son equivalentes

Respecto de la maximal de H-L: Resultados obtenidos en los 80's por J.L. Rubio de Francia e, independientemente [RdF] y L. Carleson and P. Jones [C-J]:

TEOREMA

Sean v un peso y $1 < p < \infty$.
Son equivalentes

(a)

$$\exists\, u : \qquad M : L^p(v) \to L^p(u).$$

Respecto de la maximal de H-L: Resultados obtenidos en los 80's por J.L. Rubio de Francia e, independientemente [RdF] y L. Carleson and P. Jones [C-J]:

TEOREMA

Sean v un peso y $1 < p < \infty$.
Son equivalentes

(a)

$$\exists\, u : \qquad M : L^p(v) \to L^p(u).$$

(b)

$$\exists\, C : \qquad (D_p^*) \qquad \sup_{R>1} \frac{1}{R^{n\,p'}} \int_{B(0,R)} v^{-\frac{p'}{p}}(y)dy \leq C$$

Contenidos

1 Introducción

2 Teoremas

PROPOSICIÓN

$0 < v < \infty$ *en c.t.p. y* $1 < p < \infty$*. sea* $\{\phi_t\}_t$ *el semigrupo del calor,* $\{W_t\}_t$*, o el de Poisson,* $\{P_t\}_t$*. Son equivalentes:*

Proposición

$0 < v < \infty$ en c.t.p. y $1 < p < \infty$. sea $\{\phi_t\}_t$ el semigrupo del calor, $\{W_t\}_t$, o el de Poisson, $\{P_t\}_t$. Son equivalentes:

(1)

$$\exists\ u \text{ y } t_0 > 0 : \qquad f \to \phi_{t_0} * f \ \text{ es acotado de } \ L^p(v) \to L^p(u)$$

Proposición

$0 < v < \infty$ en c.t.p. y $1 < p < \infty$. sea $\{\phi_t\}_t$ el semigrupo del calor, $\{W_t\}_t$, o el de Poisson, $\{P_t\}_t$. Son equivalentes:

(1)

$$\exists\ u \text{ y } t_0 > 0 : \qquad f \to \phi_{t_0} * f \ \text{ es acotado de } \ L^p(v) \to L^p(u)$$

(2)

$$\exists\ u \text{ y } t_0 > 0 : \qquad f \to \phi_{t_0} * f \ \text{ es acotado de } \ L^p(v) \to L^{p*}(u)$$

PROPOSICIÓN

$0 < v < \infty$ en c.t.p. y $1 < p < \infty$. sea $\{\phi_t\}_t$ el semigrupo del calor, $\{W_t\}_t$, o el de Poisson, $\{P_t\}_t$. Son equivalentes:

(1)

$$\exists\ u\ y\ t_0 > 0 : \qquad f \to \phi_{t_0} * f \ \ \textit{es acotado de}\ \ L^p(v) \to L^p(u)$$

(2)

$$\exists\ u\ y\ t_0 > 0 : \qquad f \to \phi_{t_0} * f \ \ \textit{es acotado de}\ \ L^p(v) \to L^{p*}(u)$$

(3)

$$\exists\ u\ y\ t_0 > 0 : \qquad \phi_{t_0} * f(x) < \infty\ a.a.\ x \ \ (f \in L^p(v))$$

PROPOSICIÓN

$0 < v < \infty$ en c.t.p. y $1 < p < \infty$. sea $\{\phi_t\}_t$ el semigrupo del calor, $\{W_t\}_t$, o el de Poisson, $\{P_t\}_t$. Son equivalentes:

(1)

$$\exists\, u \text{ y } t_0 > 0 : \qquad f \to \phi_{t_0} * f \;\; \textit{es acotado de} \;\; L^p(v) \to L^p(u)$$

(2)

$$\exists\, u \text{ y } t_0 > 0 : \qquad f \to \phi_{t_0} * f \;\; \textit{es acotado de} \;\; L^p(v) \to L^{p*}(u)$$

(3)

$$\exists\, u \text{ y } t_0 > 0 : \qquad \phi_{t_0} * f(x) < \infty \;\; a.a.\; x \quad (f \in L^p(v))$$

(4)

$$\exists\, t_0 > 0 : \qquad (D_p^{\phi}) \qquad 0 < \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{t_0}^{p'}(y) v^{-\frac{p'}{p}}(y)\,dy < \infty.$$

Función maximal local

$$\Phi_R^* f(x) = \sup_{t<R} |\phi_t * f(x)| = \sup_{t<R} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x-y) f(y) dy \right|,$$

$0 < R < \infty$ fijo.

Teorema 1

$0 < v < \infty$ en c.t.p., $1 < p < \infty$ Son equivalentes:

(1)

$\exists R > 0$ y u : $\quad f \to \Phi_R^* f \quad$ es acotado de $L^p(v) \to L^p(u)$

Teorema 1

$0 < v < \infty$ en c.t.p., $1 < p < \infty$ Son equivalentes:

(1)

$\exists R > 0$ y u : $\quad f \to \Phi_R^* f \quad$ es acotado de $L^p(v) \to L^p(u)$

(2)

$\exists R > 0$ y u : $\quad f \to \Phi_R^* f \quad$ es acotado de $L^p(v) \to L^{p*}(u)$

Teorema 1

$0 < v < \infty$ en c.t.p., $1 < p < \infty$ Son equivalentes:

(1)

$$\exists R > 0 \ y \ u : \qquad f \to \Phi_R^* f \qquad \text{es acotado de } \ L^p(v) \to L^p(u)$$

(2)

$$\exists R > 0 \ y \ u : \qquad f \to \Phi_R^* f \qquad \text{es acotado de } \ L^p(v) \to L^{p*}(u)$$

(3)

$$\lim_{t \to 0} \phi_t * f(x) \ \text{ existe a.a. } \ x \ \ (f \in L^p(v));$$

Teorema 1

$0 < v < \infty$ en c.t.p., $1 < p < \infty$ Son equivalentes:

(1)

$$\exists R > 0 \ y \ u: \qquad f \to \Phi_R^* f \qquad \text{es acotado de } \ L^p(v) \to L^p(u)$$

(2)

$$\exists R > 0 \ y \ u: \qquad f \to \Phi_R^* f \qquad \text{es acotado de } \ L^p(v) \to L^{p*}(u)$$

(3)

$$\lim_{t \to 0} \phi_t * f(x) \ \text{ existe a.a. } \ x \ \ (f \in L^p(v));$$

(4)

$$\exists R > 0: \qquad \Phi_R^* f(x) < \infty, \text{a.a. } \ x \ \ (f \in L^p(v));$$

Teorema 1

$0 < v < \infty$ en c.t.p., $1 < p < \infty$ Son equivalentes:

(1)

$$\exists R > 0 \; y \; u : \qquad f \to \Phi_R^* f \qquad \text{es acotado de } \; L^p(v) \to L^p(u)$$

(2)

$$\exists R > 0 \; y \; u : \qquad f \to \Phi_R^* f \qquad \text{es acotado de } \; L^p(v) \to L^{p*}(u)$$

(3)

$$\lim_{t \to 0} \phi_t * f(x) \; \text{ existe a.a. } \; x \;\; (f \in L^p(v));$$

(4)

$$\exists R > 0 : \qquad \Phi_R^* f(x) < \infty, \text{a.a. } \; x \;\; (f \in L^p(v));$$

(5)

$$v \in D_p^{\phi}.$$

Función maximal local de Hardy-Littlewood

$R > 0$,

$$\mathcal{M}_R f(x) = \sup_{0<s\leq R} \mathcal{A}_s f(x),$$

con

$$\mathcal{A}_s f(x) = \frac{1}{s^n} \int_{|x-y|<s} f(y)dy.$$

LEMA

Sean v un peso, $1 < p < \infty$ *y* $R > 0$ *fijo.*
Son equivalentes

LEMA

Sean v un peso, $1 < p < \infty$ y $R > 0$ fijo.
Son equivalentes

(i)
$$\exists u : \qquad \mathcal{M}_R : L^p(v) \to L^p(u);$$

LEMA

Sean v un peso, $1 < p < \infty$ *y* $R > 0$ *fijo.*
Son equivalentes

(i)
$$\exists u : \qquad \mathcal{M}_R : L^p(v) \to L^p(u);$$

(ii)
$$\exists u : \qquad \mathcal{M}_R : L^p(v) \to L^{p*}(u);$$

.

LEMA

Sean v un peso, $1 < p < \infty$ y $R > 0$ fijo.
Son equivalentes

(i)
$$\exists u : \qquad \mathcal{M}_R : L^p(v) \to L^p(u);$$

(ii)
$$\exists u : \qquad \mathcal{M}_R : L^p(v) \to L^{p*}(u);$$

.

(iii)
$$\exists u : \qquad \mathcal{A}_R : L^p(v) \to L^{p*}(u);$$

LEMA

Sean v un peso, $1 < p < \infty$ *y* $R > 0$ *fijo.*
Son equivalentes

(i)
$$\exists u : \qquad \mathcal{M}_R : L^p(v) \to L^p(u);$$

(ii)
$$\exists u : \qquad \mathcal{M}_R : L^p(v) \to L^{p*}(u);$$

.

(iii)
$$\exists u : \qquad \mathcal{A}_R : L^p(v) \to L^{p*}(u);$$

(iv)
$$(D_p^{loc}) \qquad v^{-\frac{p'}{p}} \in L^1_{loc}.$$

Teorema 2

$$D_p^* \subsetneq D_p^P \subsetneq D_p^W \subsetneq D_p^{loc}, \ 1 < p < \infty.$$

Demostración del Teorema 2

$D_p^* \subset D_p^P$:
$t > 0$,

$$\begin{aligned} P_t(y) &= C_n \frac{1}{t^n\left(1+\frac{|y|^2}{t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &\leq C_n\left(\frac{1}{t^n}\chi_{\{|y|<t\}}(y) + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{t^n(2^j)^{n+1}}\chi_{\{2^j t<|y|<2^{j+1} t\}}(y)\right) \\ &\leq C_n\left(\frac{1}{t^n}\chi_{\{|y|<t\}}(y) + \sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\frac{1}{(2^{j+1} t)^n}\chi_{\{|y|<2^{j+1} t\}}(y)\right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int P_t(y)^{p'} v^{-\frac{p'}{p}}(y)dy \leq C \sup_{R\geq t} \frac{1}{R^{n\,p'}} \int_{B(0,R)} v^{p'/p}(y)dy.$$

$v_3(y) = |y|^{-n-\varepsilon p}$,$1 > \varepsilon > 0$, está D_p^P pero no en D_p^*.

$D_p^P \subset D_p^W$: porque $W_{t^2}(y) \leq CP_t(y)$.

$v_2(y) = |y|^{-(n+1)\,p}$ está en D_p^W pero no en D_p^P.

$D_p^W \subset D_p^{loc}$:
Dado cualquier x y $t > 0$ fijo,

$$\int_{\{|x-y|<t^{1/2}\}} v^{-\frac{p'}{p}}(y)\,dy \leq e^{p'} \int_{\{|x-y|<t^{1/2}\}} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}p'} v^{-\frac{p'}{p}}(y)dy$$
$$\leq (e^{p'} t^{n/2}) t^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}p'} v^{-\frac{p'}{p}}(y)dy.$$

$v_1(y) = e^{-|y|^3 p}$ está en D_p^{loc} pero no en D_p^W.

L. Carleson and P. Jones, Weighted norm inequalities and a Theorem of Koosis. Mittag-Leffler Institut, Report n. 2, 1981.

L. Carleson and P. Jones, Weighted norm inequalities and a Theorem of Koosis. Mittag-Leffler Institut, Report n. 2, 1981.

Damek, E. and Garrigós, G. and Harboure, E. and Torrea, J. L., Weighted inequalities and a.e. convergence for Poisson integrals in light-cones, Mathematische Annalen, 336, 2006, 3, 727–746,

L. Carleson and P. Jones, Weighted norm inequalities and a Theorem of Koosis. Mittag-Leffler Institut, Report n. 2, 1981.

Damek, E. and Garrigós, G. and Harboure, E. and Torrea, J. L., Weighted inequalities and a.e. convergence for Poisson integrals in light-cones, Mathematische Annalen, 336, 2006, 3, 727–746,

L. M. Fernández-Cabrera and J.L. Torrea, Vector-alued inequalities with weights, Pub. Mat. 37, 1993, 177-208.

- L. Carleson and P. Jones, Weighted norm inequalities and a Theorem of Koosis. Mittag-Leffler Institut, Report n. 2, 1981.
- Damek, E. and Garrigós, G. and Harboure, E. and Torrea, J. L., Weighted inequalities and a.e. convergence for Poisson integrals in light-cones, Mathematische Annalen, 336, 2006, 3, 727–746,
- L. M. Fernández-Cabrera and J.L. Torrea, Vector-alued inequalities with weights, Pub. Mat. 37, 1993, 177-208.
- A.E. Gatto and C. Gutiérrez, On weighted norm inequalities for the maximal function, Studia Math.,76, N.1, 1983, 59-62.

- L. Carleson and P. Jones, Weighted norm inequalities and a Theorem of Koosis. Mittag-Leffler Institut, Report n. 2, 1981.
- Damek, E. and Garrigós, G. and Harboure, E. and Torrea, J. L., Weighted inequalities and a.e. convergence for Poisson integrals in light-cones, Mathematische Annalen, 336, 2006, 3, 727–746,
- L. M. Fernández-Cabrera and J.L. Torrea, Vector-alued inequalities with weights, Pub. Mat. 37, 1993, 177-208.
- A.E. Gatto and C. Gutiérrez, On weighted norm inequalities for the maximal function, Studia Math.,76, N.1, 1983, 59-62.
- Harboure, E. and Macías, Roberto A. and Segovia,Carlos, Boundedness of fractional operators on L^p spaces with different weights, Transactions of the American Mathematical Society, 285, 2, 629–647.

- L. Carleson and P. Jones, Weighted norm inequalities and a Theorem of Koosis. Mittag-Leffler Institut, Report n. 2, 1981.
- Damek, E. and Garrigós, G. and Harboure, E. and Torrea, J. L., Weighted inequalities and a.e. convergence for Poisson integrals in light-cones, Mathematische Annalen, 336, 2006, 3, 727–746,
- L. M. Fernández-Cabrera and J.L. Torrea, Vector-alued inequalities with weights, Pub. Mat. 37, 1993, 177-208.
- A.E. Gatto and C. Gutiérrez, On weighted norm inequalities for the maximal function, Studia Math.,76, N.1, 1983, 59-62.
- Harboure, E. and Macías, Roberto A. and Segovia,Carlos, Boundedness of fractional operators on L^p spaces with different weights, Transactions of the American Mathematical Society, 285, 2, 629–647.
- Kerman, R. and Sawyer, E., On weighted norm inequalities for positive linear operators, Proceedings of the American Mathematical Society,105,1989,3,589–593.

B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165, 1972, 207-226.

B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165, 1972, 207-226.

J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and vector valued inequalities. Harmonic analysis (Minneapolis, Minn., 1981), Lecture Notes in Math., 908, Springer, Berlin-New York, 1982, 86–101.

- B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165, 1972, 207-226.
- J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and vector valued inequalities. Harmonic analysis (Minneapolis, Minn., 1981), Lecture Notes in Math., 908, Springer, Berlin-New York, 1982, 86–101.
- J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz and J.L. Torrea, Calderón-Zygmund Theory for operators-valued kernels. Adv. in Math., 62, 1986, 7-48.

- B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165, 1972, 207-226.
- J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and vector valued inequalities. Harmonic analysis (Minneapolis, Minn., 1981), Lecture Notes in Math., 908, Springer, Berlin-New York, 1982, 86–101.
- J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz and J.L. Torrea, Calderón-Zygmund Theory for operators-valued kernels. Adv. in Math., 62, 1986, 7-48.
- E. Sawyer, Two weight norm inequalities for certain maximal and integral operators, Harmonic Analysis, Lecture Notes in Mathematics, volume 908, 1982, 102-127.

- B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165, 1972, 207-226.
- J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and vector valued inequalities. Harmonic analysis (Minneapolis, Minn., 1981), Lecture Notes in Math., 908, Springer, Berlin-New York, 1982, 86–101.
- J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz and J.L. Torrea, Calderón-Zygmund Theory for operators-valued kernels. Adv. in Math., 62, 1986, 7-48.
- E. Sawyer, Two weight norm inequalities for certain maximal and integral operators, Harmonic Analysis, Lecture Notes in Mathematics, volume 908, 1982, 102-127.
- W-S Young, Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function, Proc. Amer. Math. Soc.,Vol. 85, N.1, 1982, 24-26.