

# Propiedades de la dimensión quasi-Assouad

Ignacio García

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA

Trabajo en conjunto con Kathryn Hare

UNIVERSITY OF WATERLOO

# Dimensiones: Hausdorff, Box

Consideraremos conjuntos compactos no vacíos de  $[0, 1]^d$ .

# Dimensiones: Hausdorff, Box

Consideraremos conjuntos compactos no vacíos de  $[0, 1]^d$ .

## Dimensión de Hausdorff.

Fijemos  $s > 0$ .  $E \subset [0, 1]^d$  tiene medida de Hausdorff  $s$ -dimensional nula ( $\mathcal{H}^s(E) = 0$ ) si dado  $\epsilon > 0$  hay un cubrimiento de  $E$  con bolas  $\{B(x_i, r_i)\}$  ( $r_i > 0$ ) tal que

$$\sum_i r_i^s < \epsilon.$$

# Dimensiones: Hausdorff, Box

Consideraremos conjuntos compactos no vacíos de  $[0, 1]^d$ .

## Dimensión de Hausdorff.

Fijemos  $s > 0$ .  $E \subset [0, 1]^d$  tiene medida de Hausdorff  $s$ -dimensional nula ( $\mathcal{H}^s(E) = 0$ ) si dado  $\epsilon > 0$  hay un cubrimiento de  $E$  con bolas  $\{B(x_i, r_i)\}$  ( $r_i > 0$ ) tal que

$$\sum_i r_i^s < \epsilon.$$

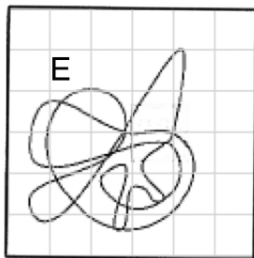
Si  $t > s$  y  $\mathcal{H}^s(E) = 0$  entonces  $\mathcal{H}^t(E) = 0$ . La dimensión de Hausdorff de  $E$  es

$$\dim_H E = \inf \{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\}$$

# Dimensión Box

Dado  $p \in \mathbb{N}$ , dividimos  $[0, 1]^d$  en  $p^d$  subcubos. Para  $E \subset [0, 1]^d$  sea

$H_p(E) :=$  número de subcubos que intersectan  $E$

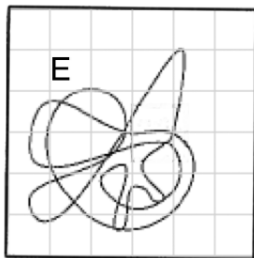


- Si  $E$  es una curva rectificable,  $H_p(E) \approx p^1$
- Si  $E$  es una superficie regular,  $H_p(E) \approx p^2$

# Dimensión Box

Dado  $p \in \mathbb{N}$ , dividimos  $[0, 1]^d$  en  $p^d$  subcubos. Para  $E \subset [0, 1]^d$  sea

$H_p(E) :=$  número de subcubos que intersectan  $E$



- Si  $E$  es una curva rectificable,  $H_p(E) \approx p^1$
- Si  $E$  es una superficie regular,  $H_p(E) \approx p^2$

La dimensión box de  $E$  es el crecimiento exponencial de  $H_p(E)$ :

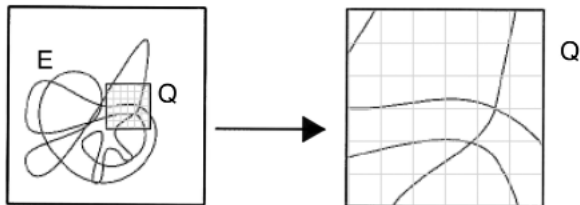
$$\overline{\dim}_B E = \inf \{ \alpha : H_p(E) \leq Cp^\alpha, \exists C, \forall p \}$$

$$\underline{\dim}_B E = \sup \{ \beta : H_p(E) \geq Cp^\beta, \exists C, \forall p \}$$

## Dimensión de Assouad

Sea  $Q \subset [0, 1]^d$  un cubo. Ahora, para  $p \in \mathbb{N}$ , dividimos  $Q$  en  $p^d$  subcubos. Dado  $E \subset [0, 1]^d$ , sea

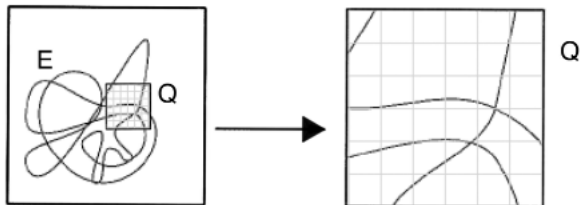
$H_p(E, Q) :=$  número de los subcubos que intersectan  $E$ .



## Dimensión de Assouad

Sea  $Q \subset [0, 1]^d$  un cubo. Ahora, para  $p \in \mathbb{N}$ , dividimos  $Q$  en  $p^d$  subcubos. Dado  $E \subset [0, 1]^d$ , sea

$H_p(E, Q) :=$  número de los subcubos que intersectan  $E$ .



Sea

$$H_p^*(E) := \max_{\text{cubos } Q} H_p(E, Q).$$

La dimensión de Assouad es

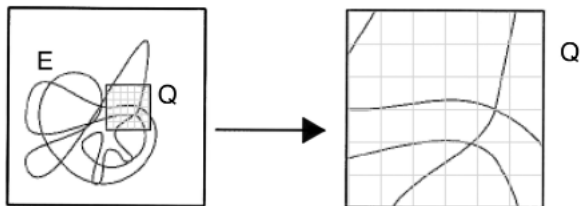
$$\dim_A(E) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\log H_p^*(E)}{\log p}$$



## Dimensión de Assouad

Sea  $Q \subset [0, 1]^d$  un cubo. Ahora, para  $p \in \mathbb{N}$ , dividimos  $Q$  en  $p^d$  subcubos. Dado  $E \subset [0, 1]^d$ , sea

$H_p(E, Q) :=$  número de los subcubos que intersectan  $E$ .



Sea

$$H_p^*(E) := \max_{\text{cubos } Q} H_p(E, Q).$$

La dimensión de Assouad es

$$\dim_A(E) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\log H_p^*(E)}{\log p}$$

- $0 \leq \dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E \leq \dim_A E \leq d.$

# Una formulación equivalente

Sea  $E \subset \mathbb{R}^d$  acotado.

Para  $r > 0$  sea  $N_r(E)$  la cantidad mínima de  $r$ -bolas cerradas que cubren  $E$ .

La dimensión box superior es

$$\overline{\dim}_B F = \inf \left\{ \alpha : N_r(E) \leq C \left( \frac{1}{r} \right)^\alpha \quad \exists C \forall 0 < r < 1 \right\}.$$

# Una formulación equivalente

Sea  $E \subset \mathbb{R}^d$  acotado.

Para  $r > 0$  sea  $N_r(E)$  la cantidad mínima de  $r$ -bolas cerradas que cubren  $E$ .

La dimensión box superior es

$$\overline{\dim}_B F = \inf \left\{ \alpha : N_r(E) \leq C \left( \frac{1}{r} \right)^\alpha \quad \exists C \forall 0 < r < 1 \right\}.$$

La dimensión de Assouad de  $E$  es

$$\dim_A F = \inf \left\{ \alpha : N_r(F \cap B(x, R)) \leq C \left( \frac{R}{r} \right)^\alpha \right. \\ \left. \exists C \forall x \in F, \forall 0 < r < R < 1 \right\}.$$

# Una formulación equivalente

Sea  $E \subset \mathbb{R}^d$  acotado.

Para  $r > 0$  sea  $N_r(E)$  la cantidad mínima de  $r$ -bolas cerradas que cubren  $E$ .

La dimensión box superior es

$$\overline{\dim}_B F = \inf \left\{ \alpha : N_r(E) \leq C \left( \frac{1}{r} \right)^\alpha \quad \exists C \forall 0 < r < 1 \right\}.$$

La dimensión de Assouad de  $E$  es

$$\dim_A F = \inf \left\{ \alpha : N_r(F \cap B(x, R)) \leq C \left( \frac{R}{r} \right)^\alpha \right. \\ \left. \exists C \forall x \in F, \forall 0 < r < R < 1 \right\}.$$

La dimensión de Assouad depende sólo de la parte más compleja del conjunto.

Fue introducida a finales de los 70 en relación al problema de 'embebimiento' bi-Lipschitz de espacios métricos en espacios Euclídeos. Tiene aplicaciones en la teoría de mapeos cuasi conformes. Recientemente, atrajo la atención de la Comunidad Fractal.

# Métrica de Hausdorff

Sean  $E, F \subset \mathbb{R}^d$  compactos.

$\epsilon$ -engordado de  $E$ :  $(E)_\epsilon = \cup_{x \in E} B(x, \epsilon)$

Distancia de Hausdorff:

$$\text{dist}(E, F) = \inf \{ \epsilon > 0 : F \subset (E)_\epsilon \text{ y } E \subset (F)_\epsilon \}$$

# Tangentes

Sean  $E, \hat{E} \subset [0, 1]^d$  compactos.  $\hat{E}$  es una tangente débil de  $E$  si hay una sucesión de similitudes  $T_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tales que

$$\text{dist}_H(T_k(E) \cap [0, 1]^d, \hat{E}) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

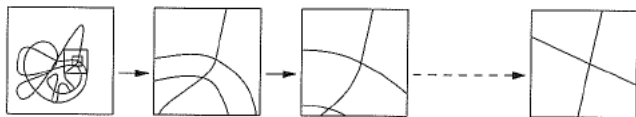
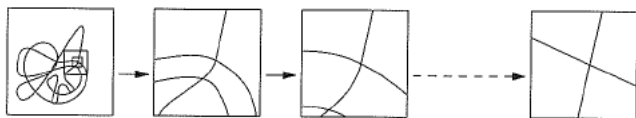


Figure:  $E$ , algunas pre-tangentes  $T_k(E) \cap [0, 1]^d$ , y una tangente  $\hat{E}$ .

# Tangentes

Sean  $E, \hat{E} \subset [0, 1]^d$  compactos.  $\hat{E}$  es una tangente débil de  $E$  si hay una sucesión de similitudes  $T_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tales que

$$\text{dist}_H(T_k(E) \cap [0, 1]^d, \hat{E}) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$



**Figure:**  $E$ , algunas pre-tangentes  $T_k(E) \cap [0, 1]^d$ , y una tangente  $\hat{E}$ .

Si  $E \subset [0, 1]^d$  es compacto no vacío y  $\hat{E}$  es una tangente débil, entonces

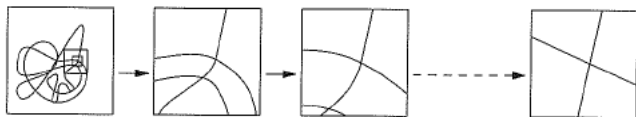
$$\dim_A \hat{E} \leq \dim_A E.$$



# Tangentes

Sean  $E, \hat{E} \subset [0, 1]^d$  compactos.  $\hat{E}$  es una tangente débil de  $E$  si hay una sucesión de similitudes  $T_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tales que

$$\text{dist}_H(T_k(E) \cap [0, 1]^d, \hat{E}) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$



**Figure:**  $E$ , algunas pre-tangentes  $T_k(E) \cap [0, 1]^d$ , y una tangente  $\hat{E}$ .

Si  $E \subset [0, 1]^d$  es compacto no vacío y  $\hat{E}$  es una tangente débil, entonces

$$\dim_A \hat{E} \leq \dim_A E.$$

Además

$$\dim_A E = \max \{ \dim_H \hat{E} : \hat{E} \text{ es una tangente débil de } E \}.$$

# Algunos ejemplos

- Sea  $F_p = \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_n \cup \{0\}$ ,  $p > 0$ .

## Algunos ejemplos

- Sea  $F_p = \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_n \cup \{0\}$ ,  $p > 0$ .

Tenemos  $\dim_H F_p = 0$

## Algunos ejemplos

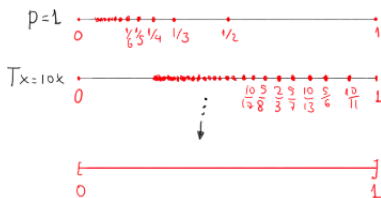
- Sea  $F_p = \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_n \cup \{0\}$ ,  $p > 0$ .

Tenemos  $\dim_H F_p = 0$ ,  $\dim_B F_p = \frac{1}{p+1}$

# Algunos ejemplos

- Sea  $F_p = \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_n \cup \{0\}$ ,  $p > 0$ .

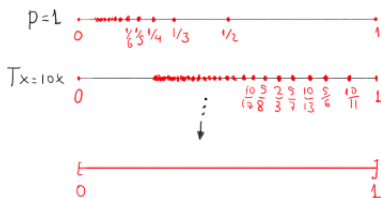
Tenemos  $\dim_H F_p = 0$ ,  $\dim_B F_p = \frac{1}{p+1}$  y  $\dim_A F_p = 1$ :



# Algunos ejemplos

- Sea  $F_p = \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_n \cup \{0\}$ ,  $p > 0$ .

Tenemos  $\dim_H F_p = 0$ ,  $\dim_B F_p = \frac{1}{p+1}$  y  $\dim_A F_p = 1$ :

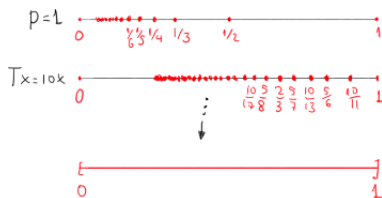


- Para  $0 < b < 1$  sea  $G_b = \{b^n\}_n \cup \{0\}$ .

# Algunos ejemplos

- Sea  $F_p = \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_n \cup \{0\}$ ,  $p > 0$ .

Tenemos  $\dim_H F_p = 0$ ,  $\dim_B F_p = \frac{1}{p+1}$  y  $\dim_A F_p = 1$ :

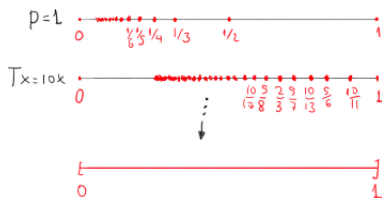


- Para  $0 < b < 1$  sea  $G_b = \{b^n\}_n \cup \{0\}$ . Luego  $\dim_A G_b = 0$ .

# Algunos ejemplos

- Sea  $F_p = \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_n \cup \{0\}$ ,  $p > 0$ .

Tenemos  $\dim_H F_p = 0$ ,  $\dim_B F_p = \frac{1}{p+1}$  y  $\dim_A F_p = 1$ :



- Para  $0 < b < 1$  sea  $G_b = \{b^n\}_n \cup \{0\}$ . Luego  $\dim_A G_b = 0$ .



# Conjuntos autosimilares

- $\Lambda = \{1, \dots, m\}$  es un conjunto finito.
- Sistema de funciones iteradas (SFI):  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  donde  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una similitud contractiva, i.e.,

$$|f_i(x) - f_i(y)| = r_i|x - y| \quad \forall x, y$$

$$0 < r_i < 1, \quad 1 < i \leq m.$$

# Conjuntos autosimilares

- $\Lambda = \{1, \dots, m\}$  es un conjunto finito.
- Sistema de funciones iteradas (SFI):  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  donde  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una similitud contractiva, i.e.,

$$|f_i(x) - f_i(y)| = r_i|x - y| \quad \forall x, y$$

$$0 < r_i < 1, \quad 1 < i \leq m.$$

- *Conjunto autosimilar generado por  $\{f_1, \dots, f_m\}$* : es el único compacto no vacío  $E = E_{\mathcal{F}}$  tal que

$$E = \bigcup_{i \in \Lambda} f_i(E)$$

# Conjuntos autosimilares

- $\Lambda = \{1, \dots, m\}$  es un conjunto finito.
- Sistema de funciones iteradas (SFI):  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  donde  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una similitud contractiva, i.e.,

$$|f_i(x) - f_i(y)| = r_i|x - y| \quad \forall x, y$$

$$0 < r_i < 1, \quad 1 < i \leq m.$$

- *Conjunto autosimilar generado por  $\{f_1, \dots, f_m\}$* : es el único compacto no vacío  $E = E_{\mathcal{F}}$  tal que

$$E = \bigcup_{i \in \Lambda} f_i(E)$$

- Más generalmente:  $E$  es sub-autosimilar si

$$E \subset \bigcup_{i \in \Lambda} f_i(E)$$



Figure: Conjunto ternario de Cantor  $C$ :  $f_1(x) = \frac{x}{3}$ ,  $f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ ,  
 $\dim C = \log 2 / \log 3$



Figure: Conjunto ternario de Cantor  $C$ :  $f_1(x) = \frac{x}{3}$ ,  $f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ ,  
 $\dim C = \log 2 / \log 3$



Figure: Carpeta de Sierpinski  $S$ ,  $\dim S = \log 8 / \log 3$



Figure: Triángulo de Sierpinski

# Dimensión de conjuntos autosimilares

Las dimensiones usuales coinciden:

$$\dim_H E = \dim_B E := \dim E$$

# Dimensión de conjuntos autosimilares

Las dimensiones usuales coinciden:

$$\dim_H E = \dim_B E := \dim E$$

Si  $E$  satisface la condición de conjunto abierto, entonces  $\dim E = s$ , donde  $s = s_{\mathcal{F}}$  es la única que solución de

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} r_i^s = 1.$$

# Dimensión de conjuntos autosimilares

Las dimensiones usuales coinciden:

$$\dim_H E = \dim_B E := \dim E$$

Si  $E$  satisface la condición de conjunto abierto, entonces  $\dim E = s$ , donde  $s = s_{\mathcal{F}}$  es la única que solución de

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} r_i^s = 1.$$

Además  $E$  es  $s$ -Ahlfors regular:

$$\mathcal{H}^s|_E(B(x, r)) \sim r^s \quad \forall x \in E, 0 < r < \text{diam } E$$

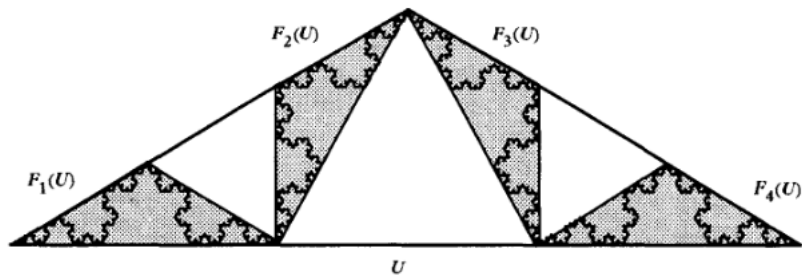


# Condición de conjunto abierto (CCA)

Existe  $U$  abierto no vacío y acotado tal que

$$\bigcup_{i \in \Lambda} f_i(U) \subset U$$

Curva de von:



## Propiedad de separación débil

Consideremos  $\mathcal{E} = \{f_{\mathbf{i}}^{-1} \circ f_{\mathbf{j}} : \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Lambda^*, \text{ with } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}\}$  con la topología inducida por la convergencia puntual.

## Propiedad de separación débil

Consideremos  $\mathcal{E} = \{f_{\mathbf{i}}^{-1} \circ f_{\mathbf{j}} : \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Lambda^*, \text{ with } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}\}$  con la topología inducida por la convergencia puntual.

Equivalen

$$\text{CCA} \iff I_d \notin \overline{\mathcal{E}}$$

# Propiedad de separación débil

Consideremos  $\mathcal{E} = \{f_{\mathbf{i}}^{-1} \circ f_{\mathbf{j}} : \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Lambda^*, \text{ with } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}\}$  con la topología inducida por la convergencia puntual.

Equivalen

$$\text{CCA} \iff I_d \notin \overline{\mathcal{E}}$$

Un SFI  $\{f_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in \Lambda}$  cumple la *propiedad de separación débil* (PSD) si

$$I_d \notin \overline{\mathcal{E} \setminus I_d}$$

# Propiedad de separación débil

Consideremos  $\mathcal{E} = \{f_i^{-1} \circ f_j : \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \Lambda^*, \text{ with } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}\}$  con la topología inducida por la convergencia puntual.

Equivalen

$$\text{CCA} \iff I_d \notin \overline{\mathcal{E}}$$

Un SFI  $\{f_i\}_{i \in \Lambda}$  cumple la *propiedad de separación débil* (PSD) si

$$I_d \notin \overline{\mathcal{E} \setminus I_d}$$

$$\text{CCA} \iff \text{WSP} + f_{\mathbf{j}} \neq f_{\mathbf{k}} \text{ para } \mathbf{j} \neq \mathbf{k}$$

# Conjuntos autosimilares y dimensión de Assouad

Teorema (Fraser, Henderson, Olson, Robinson)

*Sea  $E \subset \mathbb{R}$  un conjunto autosimilar no trivial. Si  $E$  es atractor de un SFI que satisface la condición de separación débil, entonces  $\dim_A E = \dim E$  (más aún,  $E$  es  $s$ -Ahlfors regular para algún  $s$ ). En caso contrario,  $\dim_A E = 1$ .*

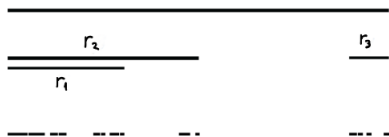
# Conjuntos autosimilares y dimensión de Assouad

Teorema (Fraser, Henderson, Olson, Robinson)

Sea  $E \subset \mathbb{R}$  un conjunto autosimilar no trivial. Si  $E$  es atractor de un SFI que satisface la condición de separación débil, entonces  $\dim_A E = \dim E$  (más aún,  $E$  es  $s$ -Ahlfors regular para algún  $s$ ). En caso contrario,  $\dim_A E = 1$ .

Sean  $f_1(x) = r_1x$ ,  $f_2(x) = r_2x$  y  $f_3(x) = r_3x + 1 - r_3$ .

Si  $\log r_1 / \log r_2 \notin \mathbb{Q}$  entonces  $\dim_A E = 1$ .



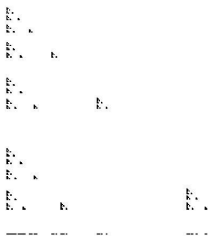
La estructura tangente (segmento) emerge alrededor del origen

# Aplicación a proyecciones ortogonales

Sean  $f_1(x, y) = (r_1x, r_1y)$ ,  $f_2(x, y) = (r_2x, r_2y) + (0, 1 - r_2)$  y  $f_3(x, y) = (r_3x, r_3y) + (1 - r_3, 0)$ .

Si  $r_i + r_j < 1$  para  $i \neq j$  y  $r_1^s + r_2^s + r_3^s = 1$  con  $s < 1$ , entonces

$$\dim_A E = \dim E = s < 1$$



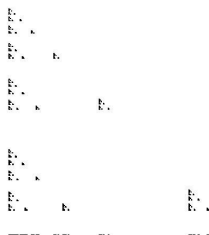


# Aplicación a proyecciones ortogonales

Sean  $f_1(x, y) = (r_1x, r_1y)$ ,  $f_2(x, y) = (r_2x, r_2y) + (0, 1 - r_2)$  y  $f_3(x, y) = (r_3x, r_3y) + (1 - r_3, 0)$ .

Si  $r_i + r_j < 1$  para  $i \neq j$  y  $r_1^s + r_2^s + r_3^s = 1$  con  $s < 1$ , entonces

$$\dim_A E = \dim E = s < 1$$



Pero si  $\log r_1 / \log r_2 \notin \mathbb{Q}$  entonces  $\dim_A \pi_x E = 1 > \dim_A E$ .

## Dimensión quasi Assouad (Lü y Xi, 2014)

Sea  $N_{r,R}(E) = \max_{x \in E} N_r(E \cap B(x, R))$ . Consideremos

$$h_E(\delta) = \inf \left\{ \alpha \geq 0 : N_{r,R}(E) \leq c \left( \frac{R}{r} \right)^\alpha \quad \exists b, c > 0 \text{ such that} \right. \\ \left. \forall 0 < r \leq R^{1+\delta} \leq R \leq b \right\}$$

-  $h(\cdot)$  es monótona decreciente. La dimensión quasi Assouad de  $E$  es

$$\dim_{qA} E = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{h_E}(\delta)$$

- Como en el caso Assouad, consideramos (localmente) escalas relativas en cualquier posición del conjunto. La profundidad de las escalas relativas crece cuando el tamaño del entorno decrece.

## Dimensión quasi Assouad (Lü y Xi, 2014)

Sea  $N_{r,R}(E) = \max_{x \in E} N_r(E \cap B(x, R))$ . Consideremos

$$h_E(\delta) = \inf \left\{ \alpha \geq 0 : N_{r,R}(E) \leq c \left( \frac{R}{r} \right)^\alpha \quad \exists b, c > 0 \text{ such that} \right. \\ \left. \forall 0 < r \leq R^{1+\delta} \leq R \leq b \right\}$$

-  $h(\cdot)$  es monótona decreciente. La dimensión quasi Assouad de  $E$  es

$$\dim_{qA} E = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{h_E}(\delta)$$

- Como en el caso Assouad, consideramos (localmente) escalas relativas en cualquier posición del conjunto. La profundidad de las escalas relativas crece cuando el tamaño del entorno decrece.
- Si  $E$  es compacto,

$$\overline{\dim}_B E \leq \dim_{qA} E \leq \dim_A E$$

## Dimensión quasi Assouad (Lü y Xi, 2014)

Sea  $N_{r,R}(E) = \max_{x \in E} N_r(E \cap B(x, R))$ . Consideremos

$$h_E(\delta) = \inf \left\{ \alpha \geq 0 : N_{r,R}(E) \leq c \left( \frac{R}{r} \right)^\alpha \quad \exists b, c > 0 \text{ such that} \right. \\ \left. \forall 0 < r \leq R^{1+\delta} \leq R \leq b \right\}$$

-  $h(\cdot)$  es monótona decreciente. La dimensión quasi Assouad de  $E$  es

$$\dim_{qA} E = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{h_E}(\delta)$$

- Como en el caso Assouad, consideramos (localmente) escalas relativas en cualquier posición del conjunto. La profundidad de las escalas relativas crece cuando el tamaño del entorno decrece.
- Si  $E$  es compacto,

$$\overline{\dim}_B E \leq \dim_{qA} E \leq \dim_A E$$

- Invariante bajo mapeos quasi-Lipschitz

## Espectro de Assouad (Fraser - Yu, 2016)

- Para  $\theta \in (0, 1)$ , se restringe la escala  $r$  a  $R^{1/\theta}$  en la def de dimensión de Assouad.

$$\dim_A^\theta E = \inf \left\{ \alpha : N_{R^{1/\theta}, R}(E) \leq c \left( \frac{R}{R^{1/\theta}} \right)^\alpha, \exists b, c > 0 \text{ such that} \right. \\ \left. \forall 0 < R \leq b \right\}$$

La función  $\theta \rightarrow \dim_A^\theta E$  es el espectro de Assouad.

## Espectro de Assouad (Fraser - Yu, 2016)

- Para  $\theta \in (0, 1)$ , se restringe la escala  $r$  a  $R^{1/\theta}$  en la def de dimensión de Assouad.

$$\dim_A^\theta E = \inf \left\{ \alpha : N_{R^{1/\theta}, R}(E) \leq c \left( \frac{R}{R^{1/\theta}} \right)^\alpha, \exists b, c > 0 \text{ such that} \right. \\ \left. \forall 0 < R \leq b \right\}$$

La función  $\theta \rightarrow \dim_A^\theta E$  es el espectro de Assouad.

-  $\dim_A^\theta E \rightarrow \overline{\dim}_B E$  as  $\theta \rightarrow 0$  y más aún

$$\overline{\dim}_B E \leq \dim_A^\theta E \leq \frac{\overline{\dim}_B E}{1 - \theta} \wedge \dim_{qA} E$$

## Teorema

*Si  $E \subset \mathbb{R}$  autosimilar, entonces  $\dim_{qA} E = \overline{\dim}_B E$ .*

## Teorema

*Si  $E \subset \mathbb{R}$  autosimilar, entonces  $\dim_{qA} E = \overline{\dim}_B E$ .*

## Corolario

*Si  $E \subset \mathbb{R}$  es autosimilar, entonces  $\dim_L^\theta E = \dim_A^\theta E = \dim_B E$  para cualquier  $0 < \theta < 1$ , independientemente de condiciones de separación.*



## Teorema

*Si  $E \subset \mathbb{R}$  autosimilar, entonces  $\dim_{qA} E = \overline{\dim}_B E$ .*

## Corolario

*Si  $E \subset \mathbb{R}$  es autosimilar, entonces  $\dim_L^\theta E = \dim_A^\theta E = \dim_B E$  para cualquier  $0 < \theta < 1$ , independientemente de condiciones de separación.*

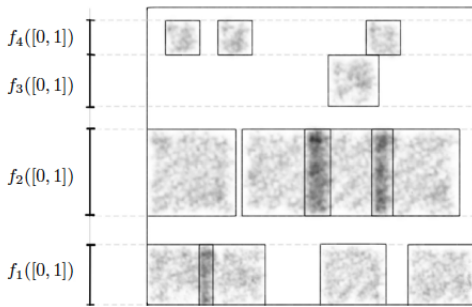
- Lo mismo vale si  $E$  es sub-autosimilar, o (sub)-autoconforme.  
Más generalmente, si  $E$  es el conjunto límite de una construcción de Moran controlada.

El teorema vale para  $S \subset \mathbb{R}^2$ , si

- $S = E_1 \times E_2$ , con  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$  autosimilares;

El teorema vale para  $S \subset \mathbb{R}^2$ , si

- $S = E_1 \times E_2$ , con  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$  autosimilares;
- $E$  es una carpeta autosimilar horizontal:



Intervalos básicos

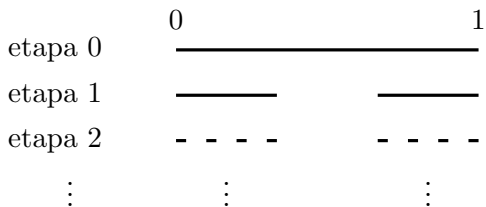
$f_i([0,1])$  de la primer etapa de  $F$  y un posible patrón para una carpeta horizontal.

### Proposición

Si  $S$  una carpeta autosimilar horizontal, entonces  
 $\dim_{qA} S = \dim_H S$ .

## Dimensión quasi Assouad y tangentes

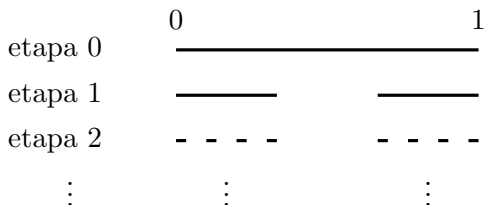
Un ejemplo: sea  $0 < \alpha < 1$  y consideremos la construcción



Para la etapa  $k$ : en cada intervalo  $I$  (cerrado) de la etapa  $k - 1$  tomamos los  $2^k$  intervalos (cerrados) y uniformemente distribuidos de long  $2^{-k/\alpha}|I|$ .

# Dimensión quasi Assouad y tangentes

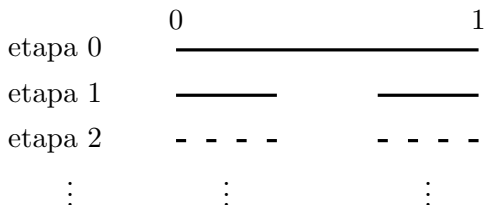
Un ejemplo: sea  $0 < \alpha < 1$  y consideremos la construcción



Para la etapa  $k$ : en cada intervalo  $I$  (cerrado) de la etapa  $k - 1$  tomamos los  $2^k$  intervalos (cerrados) y uniformemente distribuidos de long  $2^{-k/\alpha}|I|$ .  $F_\alpha$  es la intersección anidada.

# Dimensión quasi Assouad y tangentes

Un ejemplo: sea  $0 < \alpha < 1$  y consideremos la construcción



Para la etapa  $k$ : en cada intervalo  $I$  (cerrado) de la etapa  $k - 1$  tomamos los  $2^k$  intervalos (cerrados) y uniformemente distribuidos de long  $2^{-k/\alpha}|I|$ .  $F_\alpha$  es la intersección anidada.

Tenemos  $\dim_A F_\alpha = 1$  y  $\dim_{qA} F_\alpha = \alpha$ . Luego,

$$\dim_A F_\alpha = 1 \implies \hat{F} = [0, 1] \text{ es tangente de } F_\alpha,$$

o sea,

$$\dim_{qA} \hat{F} = 1 > \dim_{qA} F_\alpha.$$

Tenemos  $\dim_A F_\alpha = 1$  y  $\dim_{qA} F_\alpha = \alpha$ . Luego,

$$\dim_A F_\alpha = 1 \implies \hat{F} = [0, 1] \text{ es tangente de } F_\alpha,$$

o sea,

$$\dim_{qA} \hat{F} = 1 > \dim_{qA} F_\alpha.$$

Más aún,

### Proposición

*Cualquier tangente de  $F_\alpha$  es o bien un conjunto finito o bien un intervalo.*

No se puede caracterizar  $\dim_{qA} F_\alpha$  usando (una subfamilia de) sus tangentes: si  $\mathcal{T}$  es cualquier subconjunto del conjunto de tangentes de  $F$ , entonces no vale

$$\dim_{qA} F = \sup\{\dim_H \hat{F} : \hat{F} \in \mathcal{T}\}$$



# Tangentes rápidas

Una tangente  $\hat{F}$  de  $F \subset \mathbb{R}^d$  es rápida si existen  $c, \epsilon > 0$  tales que

$$\text{dist}_H(T_k(F) \cap [0, 1]^d, \hat{F}) \leq Cb_k^{-\epsilon}$$

## Teorema

Si  $\hat{F}$  es una tangente rápida de  $F \subset \mathbb{R}^d$  entonces

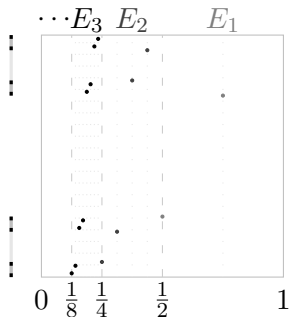
$$\underline{\dim}_B \hat{F} \leq \dim_{qA} F.$$

## Ejemplo

Si  $F_p = \{n^{-p}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $p > 0$ , entonces  $[0, 1]$  es tangente rápida de  $F_p$ . Luego,  $\dim_{qA} F_p = 1$

# Dimensión de proyecciones ortogonales

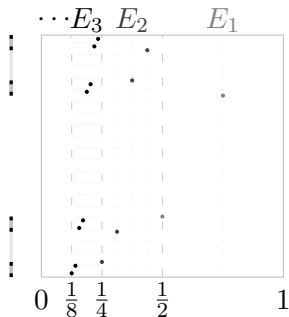
Sea  $E \subset \mathbb{R}^2$  con  $E = \bigcup_n E_n$ , donde



- Para cada  $j$ ,  $\{2^{-j} + i2^{-2j} : i = 1, \dots, 2^j\} \subset \pi_x E$ .  
Luego,  $[0, 1]$  es tangente rápida y  $\dim_{qA} \pi_x E = 1$ .

# Dimensión de proyecciones ortogonales

Sea  $E \subset \mathbb{R}^2$  con  $E = \bigcup_n E_n$ , donde



- Para cada  $j$ ,  $\{2^{-j} + i2^{-2j} : i = 1, \dots, 2^j\} \subset \pi_x E$ .

Luego,  $[0, 1]$  es tangente rápida y  $\dim_{qA} \pi_x E = 1$ . Pero  $\dim_{qA} E = 1/2$ .