

Núcleos asociados a difusiones fraccionarias diádicas como límites centrales

Federico Morana

28 de octubre de 2016

Variables Aleatorias

(Ω, \mathcal{F}, P) e.p. $P(\Omega) = 1$

$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible

Distribución

$Y \sim \mu$, μ medida de probabilidad en \mathbb{R}

$$P(Y \in B) = \mu(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}^1.$$

Si μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, $d\mu = gdx$, entonces Y se distribuye de acuerdo a una función de densidad g , es decir

$$P(Y \in B) = \int_B g(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}^1.$$

Esperanza $\mu = \mathcal{E}(Y) = \int_{\Omega} Y(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x g(x) dx$

Varianza $\sigma^2 = \int_{\Omega} |Y - \mu|^2 dP = \int_{\mathbb{R}} |x - \mu|^2 g(x) dx$

Teoremas del Límite Central

*In general usage, a central limit theorem is any of a set of weak-convergence theorems in probability theory. They all express the fact that a sum of many independent and identically distributed (i.i.d.) random variables, or alternatively, random variables with specific types of dependence, **will tend to be distributed according to one of a small set of attractor distributions**. When the variance of the i.i.d. variables is finite, the attractor distribution is the normal distribution. In contrast, the sum of a number of i.i.d. random variables with power law tail distributions decreasing as $|x|^{-\alpha-1}$ where $0 < \alpha < 2$ (and therefore having infinite variance) will tend to an α -stable distribution with stability parameter (or index of stability) of α as the number of variables grows.*

*De Moivre - Laplace - Lyapunov - Pólya - Lévy - Markov - Cauchy
- Bessel - Poisson - Cramér - Kolmogorov*

Teorema del Límite Central: varianza finita

$\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{E}(S_n) = n\mu$$

Teorema del Límite Central: varianza finita

$\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{E}(S_n) = n\mu$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma^2)$$

Teorema del Límite Central: varianza finita

$\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{E}(S_n) = n\mu$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma^2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Teorema del Límite Central: varianza finita

$\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{E}(S_n) = n\mu$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma^2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Para todo boreliano B

$$P\left(\frac{S_n - \mathcal{E}(S_n)}{\sqrt{n}} \in B\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Suma de variables aleatorias independientes

Y_1, Y_2 v.a. independientes con distribución dada por las densidades g_1 y g_2 :

$$Y_1 \sim g_1 \quad Y_2 \sim g_2$$

Entonces

$$Y_1 + Y_2 \sim g_1 * g_2$$

donde

$$f * g(x) = \int f(x - y)g(y) dy.$$

Luego, si $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con densidad g ,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim g * \dots * g = g^{(n)}$$

Producto por un escalar

Y v.a. con densidad g , entonces dado $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$cY \sim \frac{1}{c}g\left(\frac{x}{c}\right)dx =: g_{1/c}(x)dx$$

Es decir, la densidad de cY está dada por una modificación de factor $1/c$ de la densidad de Y .

Luego, si $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con densidad g ,

$$\frac{S_n}{n} \sim ng^{(n)}(n \cdot) = g_n^{(n)}$$

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{ng}^{(n)}(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

Transformada de Fourier (función característica)

Y v.a.

Función característica: $f_Y(t) = \mathcal{E}(e^{itY})$

La función característica determina unívocamente la distribución.

Transformada de Fourier (función característica)

Y v.a.

Función característica: $f_Y(t) = \mathcal{E}(e^{itY})$

La función característica determina unívocamente la distribución.

Si Y se distribuye con densidad g , entonces su f.c. es la transformada de Fourier de la densidad, dada por

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \hat{g}(\xi) = \int g(x)e^{-ix \cdot \xi} dx$$

Transformada de Fourier (función característica)

Y v.a.

Función característica: $f_Y(t) = \mathcal{E}(e^{itY})$

La función característica determina unívocamente la distribución.

Si Y se distribuye con densidad g , entonces su f.c. es la transformada de Fourier de la densidad, dada por

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \hat{g}(\xi) = \int g(x)e^{-ix \cdot \xi} dx$$

Convolución \longrightarrow Producto

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Transformada de Fourier (función característica)

Y v.a.

Función característica: $f_Y(t) = \mathcal{E}(e^{itY})$

La función característica determina unívocamente la distribución.

Si Y se distribuye con densidad g , entonces su f.c. es la transformada de Fourier de la densidad, dada por

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \hat{g}(\xi) = \int g(x)e^{-ix \cdot \xi} dx$$

Convolución \longrightarrow Producto

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Molificación \longrightarrow Dilatación

$$\mathcal{F}[ng(n \cdot)](\xi) = \mathcal{F}[g]\left(\frac{\xi}{n}\right)$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \dots * g)}_n (\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \dots * g)}_n(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) = \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \dots * g)}_n(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) = \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Taylor:

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \dots * g)}_n(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) = \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Taylor:

$$\widehat{g}(0) = \int g(x) e^{-ix \cdot 0} dx = \int g(x) dx = 1$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \dots * g)}_n(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) = \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Taylor:

$$\widehat{g}(0) = \int g(x) e^{-ix \cdot 0} dx = \int g(x) dx = 1$$

$$\widehat{g}'(0) = -i \int x g(x) dx = -i\mu = 0$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \dots * g)}_n(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) = \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Taylor:

$$\widehat{g}(0) = \int g(x) e^{-ix \cdot 0} dx = \int g(x) dx = 1$$

$$\widehat{g}'(0) = -i \int x g(x) dx = -i\mu = 0$$

$$\widehat{g}''(0) = - \int x^2 g(x) dx = -\sigma^2 = -1$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \dots * g)}_n(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) = \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Taylor:

$$\widehat{g}(0) = \int g(x) e^{-ix \cdot 0} dx = \int g(x) dx = 1$$

$$\widehat{g}'(0) = -i \int x g(x) dx = -i\mu = 0$$

$$\widehat{g}''(0) = - \int x^2 g(x) dx = -\sigma^2 = -1$$

$$\widehat{g}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2} + o(\xi^2)$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} \underbrace{(g * \cdots * g)}_n (\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) &= \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^2 + o \left(\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{\xi^2}{2n} + o \left(\frac{\xi^2}{n} \right) \right]^n \end{aligned}$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}(\underbrace{g * \cdots * g}_n)(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\begin{aligned}\widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) &= \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^2 + o \left(\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{\xi^2}{2n} + o \left(\frac{\xi^2}{n} \right) \right]^n \\ &\longrightarrow e^{-\xi^2/2}\end{aligned}$$

Demostración TLC

$$X_i \sim g, \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}(\underbrace{g * \cdots * g}_n)(\sqrt{n} \cdot) = g_{\sqrt{n}}^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \widehat{(g_{\sqrt{n}}^{(n)})}(\xi) &= \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^2 + o \left(\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{\xi^2}{2n} + o \left(\frac{\xi^2}{n} \right) \right]^n \\ &\longrightarrow e^{-\xi^2/2} = \widehat{e^{-\xi^2/2}} \end{aligned}$$

□

Ecuación del Calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta_x u(x, t)$$

Solución fundamental:

$$\begin{aligned} W_t(x) &= (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)} \\ &\sim N(0, 2t) \end{aligned}$$

Teorema del Límite Central: varianza infinita

$\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con distribuciones de colas como $|x|^{-\alpha-1}$, donde $0 < \alpha < 2$ (luego tienen varianza infinita, y también media infinita cuando $\alpha \leq 1$).

Entonces, la distribución de $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ se comporta asintóticamente como una distribución simétrica α -estable (sae).

Las distribuciones sae se caracterizan por tener transformada de Fourier de la forma $e^{-|c\xi|^\alpha}$, donde c es un parámetro de escala (mide la anchura de la distribución).

Teorema del Límite Central: varianza infinita

$\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con distribuciones de colas como $|x|^{-\alpha-1}$, donde $0 < \alpha < 2$ (luego tienen varianza infinita, y también media infinita cuando $\alpha \leq 1$).

Entonces, la distribución de $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ se comporta asintóticamente como una distribución simétrica α -estable ($s\alpha e$).

Las distribuciones $s\alpha e$ se caracterizan por tener transformada de Fourier de la forma $e^{-|c\xi|^\alpha}$, donde c es un parámetro de escala (mide la anchura de la distribución).

Ej: La distribución de Cauchy es la distribución de probabilidad $s\alpha e$ de parámetros $\alpha = 1$ y $c = 1$, y tiene una función de densidad dada por

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Ecuación del Calor fraccionaria

$$\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^{s/2} = 0$$

Laplaciano fraccionario:

$$-(-\Delta)^{s/2}g(x) = v.p. \int_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{g(x) - g(y)}{|x - y|^{n+s}} dy$$

Solución fundamental:

$$P_t^s(x) = \frac{t^s}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}$$

Contextos más generales

(X, d, μ) e.t.h. de dim 1 (normal)

Operador de diferenciación fraccionaria, $0 < s < 1$:

$$D^s g(x) = \int_{y \in X} \frac{g(x) - g(y)}{d(x, y)^{1+s}} dy$$

Problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D^s u(x, t), & x \in X, t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in X. \end{cases}$$

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

$$(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|) \quad \mathcal{D} = \{I = I_k^j = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

$\delta(x, y) = \inf\{|I| : x, y \in I, I \in \mathcal{D}\}$ distancia diádica
(ultramétrica)

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

$$(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|) \quad \mathcal{D} = \{I = I_k^j = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

$\delta(x, y) = \inf\{|I| : x, y \in I, I \in \mathcal{D}\}$ distancia diádica
(ultramétrica)

Operador de diferenciación fraccionaria diádica:

$$D^s g(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^+} \frac{g(x) - g(y)}{\delta(x, y)^{1+s}} dy.$$

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

$$(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|) \quad \mathcal{D} = \{I = I_k^j = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

$\delta(x, y) = \inf\{|I| : x, y \in I, I \in \mathcal{D}\}$ distancia diádica
(ultramétrica)

Operador de diferenciación fraccionaria diádica:

$$D^s g(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^+} \frac{g(x) - g(y)}{\delta(x, y)^{1+s}} dy.$$

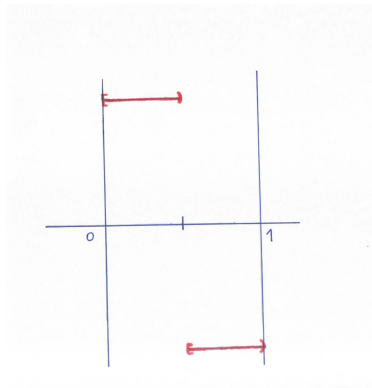
Problema de difusión:

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D^s u, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Ondículas de Haar en \mathbb{R}^+

$$\mathcal{X}_{[0, \frac{1}{2})}(x) - \mathcal{X}_{[\frac{1}{2}, 1)}(x) = h(x)$$

$$h_k^j(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k) \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$$



b.o.n. $L^2(\mathbb{R})$

base incondicional $L^p(\mathbb{R})$

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

Actis - Aimar [2014]

Solución explícita:

$$u(x, t) = \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-t2^{sj(h)}} \langle u_0, h \rangle h(x)$$

donde \mathcal{H} es el sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^+)$, $j(h)$ es la escala (resolución) de h y $\langle u_0, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x)h(x)dx$.

Forma integral:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x, y; t)u_0(y)dy,$$

$$K(x, y; t) = \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^+, t > 0.$$

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

Núcleos:

$$K(x, y; t) = \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^+, t > 0$$

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

Núcleos:

$$\begin{aligned} K(x, y; t) &= \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) & x, y \in \mathbb{R}^+, t > 0 \\ &= \varphi_t(\delta(x, y)) \end{aligned}$$

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

Núcleos:

$$\begin{aligned} K(x, y; t) &= \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) && x, y \in \mathbb{R}^+, t > 0 \\ &= \varphi_t(\delta(x, y)) \\ &= \frac{1}{t^{1/s}} \varphi\left(\frac{\delta(x, y)}{t^{1/s}}\right) \end{aligned}$$

Difusiones asociadas a Diferenciaciones Diádicas en \mathbb{R}^+

Núcleos:

$$\begin{aligned}K(x, y; t) &= \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) && x, y \in \mathbb{R}^+, t > 0 \\ &= \varphi_t(\delta(x, y)) \\ &= \frac{1}{t^{1/s}} \varphi\left(\frac{\delta(x, y)}{t^{1/s}}\right)\end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(r) = \frac{1}{r} \left[-e^{-b_s r^{-s}} + \sum_{j \geq 1} 2^{-j} e^{-b_s (2^j r)^{-s}} \right]$$

Procesos aditivos

Nucleos de “transición” $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

f densidad inicial: $f \geq 0$, $\int f dx = 1$

Procesos aditivos

Nucleos de “transición” $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

f densidad inicial: $f \geq 0$, $\int f dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y, x) dy$$

Procesos aditivos

Nucleos de “transición” $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

f densidad inicial: $f \geq 0$, $\int f dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y, x) dy$$

$$T^2f(x) = \int Tf(z)K(z, x) dz$$

Procesos aditivos

Nucleos de “transición” $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

f densidad inicial: $f \geq 0$, $\int f dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y, x) dy$$

$$\begin{aligned} T^2f(x) &= \int Tf(z)K(z, x) dz \\ &= \iint f(y)K(y, z) dy K(z, x) dz \end{aligned}$$

Procesos aditivos

Nucleos de “transición” $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

f densidad inicial: $f \geq 0$, $\int f dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y, x) dy$$

$$\begin{aligned} T^2f(x) &= \int Tf(z)K(z, x) dz \\ &= \iint f(y)K(y, z) dy K(z, x) dz \\ &= \int f(y) \left(\int K(y, z)K(z, x) dz \right) dy \end{aligned}$$

Procesos aditivos

Nucleos de “transición” $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

f densidad inicial: $f \geq 0$, $\int f dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y, x) dy$$

$$\begin{aligned} T^2f(x) &= \int Tf(z)K(z, x) dz \\ &= \iint f(y)K(y, z) dy K(z, x) dz \\ &= \int f(y) \left(\int K(y, z)K(z, x) dz \right) dy \\ &= \int f(y)K^{(2)}(y, x) dy \end{aligned}$$

Procesos aditivos

Nucleos de “transición” $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

f densidad inicial: $f \geq 0$, $\int f dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y, x) dy$$

$$T^2f(x) = \int Tf(z)K(z, x) dz$$

$$= \iint f(y)K(y, z) dy K(z, x) dz$$

$$= \int f(y) \left(\int K(y, z)K(z, x) dz \right) dy$$

$$= \int f(y)K^{(2)}(y, x) dy$$

\vdots

$$T^n f(x) = \int f(y)K^{(n)}(y, x) dy$$

Núcleos de Markov diádicos

Núcleos de transición diádicos (de tipo Markov): \mathcal{K}

$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tales que

- (i) $K = \varphi \circ \delta$
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^+} K(x, y) dy = 1$
- (iii) $K(x, y) \geq K(x, z) \Leftrightarrow \delta(x, y) \leq \delta(x, z)$

Núcleos de Markov diádicos

Núcleos de transición diádicos (de tipo Markov): \mathcal{K}

$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tales que

- (i) $K = \varphi \circ \delta$
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^+} K(x, y) dy = 1$
- (iii) $K(x, y) \geq K(x, z) \Leftrightarrow \delta(x, y) \leq \delta(x, z)$

$K \in \mathcal{K} \Rightarrow K^{(n)} \in \mathcal{K}$

Núcleos de Markov diádicos

Núcleos de transición diádicos (de tipo Markov): \mathcal{K}

$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tales que

- (i) $K = \varphi \circ \delta$
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^+} K(x, y) dy = 1$
- (iii) $K(x, y) \geq K(x, z) \Leftrightarrow \delta(x, y) \leq \delta(x, z)$

$K \in \mathcal{K} \Rightarrow K^{(n)} \in \mathcal{K}$

Perfiles:

$\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ $\varphi \geq 0$
- ▶ $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j-1} \varphi(2^j) = 1$
- ▶ φ monótono no decreciente

Núcleos de Markov diádicos

Molificación:

$$K_n(x, y) = n\varphi(n\delta(x, y))$$

Núcleos de Markov diádicos

Molificación:

$$K_n(x, y) = n\varphi(n\delta(x, y))$$

obs: $n = 2^j \Rightarrow 2^j\varphi(2^j\delta(x, y)) = 2^j\varphi(\delta(2^jx, 2^jy))$

Núcleos de Markov diádicos

Molificación:

$$K_n(x, y) = n\varphi(n\delta(x, y))$$

obs: $n = 2^j \Rightarrow 2^j\varphi(2^j\delta(x, y)) = 2^j\varphi(\delta(2^jx, 2^jy))$

$$K_{2^j}(x, y) = 2^j\varphi(\delta(2^jx, 2^jy)) = 2^jK(2^jx, 2^jy)$$

Núcleos de Markov diádicos

Molificación:

$$K_n(x, y) = n\varphi(n\delta(x, y))$$

obs: $n = 2^j \Rightarrow 2^j\varphi(2^j\delta(x, y)) = 2^j\varphi(\delta(2^jx, 2^jy))$

$$K_{2^j}(x, y) = 2^j\varphi(\delta(2^jx, 2^jy)) = 2^jK(2^jx, 2^jy)$$

Factor adecuado de molificación: 2^j

$$K \in \mathcal{K} \Rightarrow K_{2^j} \in \mathcal{K}$$

Procesos de Markov - Análisis espectral

Antes $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \sim \mathcal{G}_{n^{1/\alpha}}^{(n)}$

Ahora $K_{2^j}^{(2^j)} \longrightarrow T_j$ (Proceso $P_1(K)$)

Teorema

Sea $K \in \mathcal{H}$ y T el operador asociado. Entonces

$$Th = \lambda(h)h, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Procesos de Markov - Análisis espectral

Antes $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \sim \mathcal{G}_{n^{1/\alpha}}^{(n)}$

Ahora $K_{2^j}^{(2^j)} \longrightarrow T_j$ (Proceso $P_1(K)$)

Teorema

Sea $K \in \mathcal{K}$ y T el operador asociado. Entonces

$$Th = \lambda(h)h, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Obs: Los autovalores $\lambda(\mathcal{H})$ determinan unívocamente al núcleo $K \in \mathcal{K}$.

Procesos de Markov - Análisis espectral

Antes $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \sim \mathcal{G}_{n^{1/\alpha}}^{(n)}$

Ahora $K_{2^j}^{(2^j)} \longrightarrow T_j$ (Proceso $P_1(K)$)

Teorema

Sea $K \in \mathcal{K}$ y T el operador asociado. Entonces

$$Th = \lambda(h)h, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Obs: Los autovalores $\lambda(\mathcal{H})$ determinan unívocamente al núcleo $K \in \mathcal{K}$.

- ▶ $\lambda(h)$ depende sólo del nivel de h , i.e. $\lambda(h) = \lambda(j(h))$
- ▶ $\lambda(h) \xrightarrow{j(h) \rightarrow +\infty} 0$, $\lambda(h) \xrightarrow{j(h) \rightarrow -\infty} 1$
- ▶ $\lambda(h) \geq \lambda(\tilde{h}) \Leftrightarrow j(h) \leq j(\tilde{h})$

Procesos de Markov - Análisis espectral

Antes $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \sim \mathcal{G}_{n^{1/\alpha}}^{(n)}$

Ahora $K_{2^j}^{(2^j)} \longrightarrow T_j$ (Proceso $P_1(K)$)

Teorema

Sea $K \in \mathcal{H}$ y T el operador asociado. Entonces

$$Th = \lambda(h)h, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Lema

$$T_i h = \lambda_i^{2^i}(h)h = \lambda(j(h) - i)^{2^i} h$$

Teorema de Alternativas

Sean $K \in \mathcal{K}$ y $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso de Markov P_1 con núcleo de transición K . Si el espectro de $\{T_n\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{2^n}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathcal{H}$,
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}$,
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau|I(h)|}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathcal{H}$.

Teorema de Alternativas

Sean $K \in \mathcal{K}$ y $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso de Markov P_1 con núcleo de transición K . Si el espectro de $\{T_n\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{2^n}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathcal{H}$, (LGN)
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}$,
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau|I(h)|}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathcal{H}$.

Teorema de Alternativas

Sean $K \in \mathcal{K}$ y $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso de Markov P_1 con núcleo de transición K . Si el espectro de $\{T_n\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{2^n}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathcal{H}$, (LGN)
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}$, (dispersión)
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau|I(h)|}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathcal{H}$.

Teorema de Alternativas

Sean $K \in \mathcal{K}$ y $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso de Markov P_1 con núcleo de transición K . Si el espectro de $\{T_n\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{2^n}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathcal{H}$, (LGN)
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}$, (dispersión)
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau|I(h)|}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathcal{H}$.
(Leyes Centrales)

Un Teorema del Límite Central ($s = 1$)

Sea $K = \varphi \circ \delta$ un núcleo de \mathcal{H} .

Si $\varphi(x)$ decae en el infinito como x^{-2} , i.e. $\lim_{j \rightarrow \infty} (2^j)^2 \varphi(2^j) < \infty$,

entonces el proceso de Markov P_1 con núcleo de transición K satisface una ley central.

En particular, si φ tiene “índice de estabilidad diádico” $\sigma > 0$, es decir, $\lim_{j \rightarrow \infty} (2^j)^2 \varphi(2^j) = \sigma$, entonces el proceso P_1 tiene como límite al operador integral T_∞ de autovalores

$\lambda(\mathcal{H}) = e^{-\sigma |\mathcal{H}|^{-1}} = e^{-\sigma 2^{j(\mathcal{H})}}$, cuyo núcleo está dado por

$$K_\infty(x, y; \sigma) = \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-\sigma 2^{j(h)}} h(x) h(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Bosquejo demostración

Sean $\lambda(\mathcal{H})$ los autovalores de el operador asociado a K .

$0 \leq \lambda \leq 1$ λ no decreciente

Si $\lambda(j_0) = 1 \Rightarrow \lambda \equiv 1$

$$\lambda(j) = 1 - 2^{-\gamma(j)}$$

Bosquejo demostración

Sean $\lambda(\mathcal{H})$ los autovalores de el operador asociado a K .

$0 \leq \lambda \leq 1$ λ no decreciente

Si $\lambda(j_0) = 1 \Rightarrow \lambda \equiv 1$

$$\lambda(j) = 1 - 2^{-\gamma(j)}$$

$$\lambda_i^{2^i}(j) = \lambda^{2^i}(j - i) = (1 - 2^{-\gamma(j-i)})^{2^i}$$

Bosquejo demostración

Sean $\lambda(\mathcal{H})$ los autovalores de el operador asociado a K .

$0 \leq \lambda \leq 1$ λ no decreciente

Si $\lambda(j_0) = 1 \Rightarrow \lambda \equiv 1$

$$\lambda(j) = 1 - 2^{-\gamma(j)}$$

$$\begin{aligned}\lambda_i^{2^i}(j) &= \lambda^{2^i}(j-i) = (1 - 2^{-\gamma(j-i)})^{2^i} \\ &= \left[(1 - 2^{-\gamma(j-i)})^{2^{\gamma(j-i)}} \right]^{2^{i-\gamma(j-i)}}\end{aligned}$$

Bosquejo demostración

Sean $\lambda(\mathcal{H})$ los autovalores de el operador asociado a K .

$0 \leq \lambda \leq 1$ λ no decreciente

Si $\lambda(j_0) = 1 \Rightarrow \lambda \equiv 1$

$$\lambda(j) = 1 - 2^{-\gamma(j)}$$

$$\begin{aligned}\lambda_i^{2^i}(j) &= \lambda^{2^i}(j-i) = (1 - 2^{-\gamma(j-i)})^{2^i} \\ &= \left[(1 - 2^{-\gamma(j-i)})^{2^{\gamma(j-i)}} \right]^{2^{i-\gamma(j-i)}} \\ &\longrightarrow \lambda_\infty(j) = e^{-2^{-\nu(j)}}\end{aligned}$$

Bosquejo demostración

Sean $\lambda(\mathcal{H})$ los autovalores de el operador asociado a K .

$0 \leq \lambda \leq 1$ λ no decreciente

Si $\lambda(j_0) = 1 \Rightarrow \lambda \equiv 1$

$$\lambda(j) = 1 - 2^{-\gamma(j)}$$

$$\begin{aligned}\lambda_i^{2^i}(j) &= \lambda^{2^i}(j-i) = (1 - 2^{-\gamma(j-i)})^{2^i} \\ &= \left[(1 - 2^{-\gamma(j-i)})^{2^{\gamma(j-i)}} \right]^{2^{i-\gamma(j-i)}} \\ &\longrightarrow \lambda_\infty(j) = e^{-2^{-\nu(j)}}\end{aligned}$$



Convergencia

La convergencia del espectro implica la convergencia en L^2 cuando el dato inicial está en L^2 .

Teorema

Sea $K \in \mathcal{K}$ y $f \in L^2$. Si (T_i) converge en espectro al operador T_∞ entonces $T_i f \xrightarrow[i \rightarrow +\infty]{L^2} T_\infty f$.

Demostración

Como \mathcal{H} es base ortonormal de L^2 , $f = \sum_{h \in \mathcal{H}} \langle f, h \rangle h$.
Por la continuidad de los operadores T_i ,

$$T_i f = \sum_{h \in \mathcal{H}} \langle f, h \rangle T_i h = \sum_{h \in \mathcal{H}} \langle f, h \rangle \lambda_i(h) h,$$

para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Convergencia

$$\begin{aligned}\|T_i f - T_\infty f\|_2^2 &= \left\| \sum_{h \in \mathcal{H}} (\lambda_i(h) - \lambda_\infty(h)) \langle f, h \rangle h \right\|_2^2 \\ &= \sum_{h \in \mathcal{H}} |\lambda_i(h) - \lambda_\infty(h)|^2 |\langle f, h \rangle|^2\end{aligned}$$

que converge a 0 cuando $i \rightarrow +\infty$ por del teorema de convergencia dominada, dada la acotación uniforme de los autovalores ($0 \leq \lambda_i(h) \leq 1 \forall h \forall i$).



Teorema

Sea $K \in \mathcal{H}$ y $f \in L^p$, con $1 < p < \infty$. Entonces la convergencia del espectro de la sucesión (T_i) al operador T_∞ implica la convergencia en L^p de $(T_i f)$ a $T_\infty f$.

Teorema de Alternativas ($s = 1/2$)

Sean $K \in \mathcal{K}$ y $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso de Markov $P_{\frac{1}{2}}$ con núcleo de transición K . Si hay convergencia puntual del espectro de $\{T_n\}$ respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{2n}^{2^n}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathcal{H}$,
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}$,
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau_i |l(h)|^{\frac{1}{2}}} \quad \forall h \in \mathcal{H}$,
donde $i = j(h) \bmod 2$ y $\vec{\tau} = (\tau_0, \tau_1)$ es tal que $0 \leq \tau_0 \leq \sqrt{2}\tau_1$
y $\tau_1 \leq \sqrt{2}\tau_0$.

Caso $\tau_0 = \tau_1 = \tau$

Teorema del Límite Central ($s = 1/2$)

Sea $K = \varphi \circ \delta$. Si $\varphi(x)$ decae en el infinito como $|x|^{-(1+1/2)}$, i.e. $\lim_{j \rightarrow \infty} (2^j)^{3/2} \varphi(2^j) < \infty$, entonces el proceso de Markov $P_{1/2}$ con núcleo de transición K satisface una ley central.

En particular, si φ tiene *índice de estabilidad diádico* $\sigma > 0$, es decir, $\lim_{j \rightarrow \infty} (2^j)^{3/2} \varphi(2^j) = \sigma$, entonces el proceso $P_{1/2}$ tiene como límite al operador integral T_∞ de autovalores $\lambda(\mathcal{H}) = e^{-\sigma |\lambda(\mathcal{H})|^{-1/2}}$.

Su núcleo $K(x, y; \sigma)$ es el que determina la solución de la ecuación de difusión diferenciación fraccionaria diádica, cuando σ se mueve en los reales positivos.