# Desigualdades con dos pesos para el conmutador de la Integral Fraccionaria asociada al operador de Schrödinger

*S. Hartzstein*; *O. Salinas*; *M.A. Vignatti*.

IMAL-UNL

Seminario del IMAL ”Carlos Segovia Fernández”
11 de noviembre de 2016, Santa Fe.

Operador de Schrödinger sobre $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$

$$\mathcal{L} = -\Delta + V$$

Operador de Schrödinger sobre $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$

$$\mathcal{L} = -\Delta + V$$

$$RH_{q_0}: \quad \left(\frac{1}{|B|}\int_B V(y)^{q_0}dy\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq \frac{C}{|B|}\int_B V(y)dy,$$

Operador de Schrödinger sobre $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$

$$\mathcal{L} = -\Delta + V$$

$$RH_{q_0}: \quad \left( \frac{1}{|B|} \int_B V(y)^{q_0} dy \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq \frac{C}{|B|} \int_B V(y) dy,$$

para toda $B \subset \mathbb{R}^n$ y algún $q_0 > \frac{n}{2}$.

- Semigrupo de difusión del calor generado por $\mathcal{L}$: $e^{-t\mathcal{L}}$, con núcleo $k_t(x,y)$.
- Potencias negativas (Integral fraccionaria):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\alpha f(x) = \mathcal{L}^{-\frac{\alpha}{2}} f(x) &= \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x) t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty k_t(x,y) t^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t} \right) f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_\alpha(x,y) f(y)dy, \quad 0 < \alpha < n\end{aligned}$$

Para alguna función $b, f \in L_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$
Conmutador de la Integral Fraccionaria Schrödinger;

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x) &= b(x)\mathcal{I}_{\alpha}(f)(x) - \mathcal{I}_{\alpha}(bf)(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(b(x)-b(y))\mathcal{K}_{\alpha}(x,y)f(y)dy\end{aligned}$$

# Objetivo

Encontrar condiciones suficientes sobre la función $b$, y pares de pesos $\mu, \nu$ que garanticen;

- Para $1 < p \leq q < \infty$, $\mathcal{I}_{\alpha,b} : L^p(\mathbb{R}^n, \nu) \to L^q(\mathbb{R}^n, \mu)$.
- Para $p = 1$, $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ verifique en $\mathbb{R}^n$ una desigualdad modular de tipo débil $L \log L$.

Para el caso clásico $V = 0$:

$$I_{\alpha,b}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Para el caso clásico $V = 0$:

$$I_{\alpha,b}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

**Sin pesos**

Chanillo(1982):

$0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, b \in BMO(\mathbb{R}^n)$

$$I_{\alpha,b} : L^p \to L^q$$

Para el caso clásico $V = 0$:

$$I_{\alpha,b}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

**Sin pesos**

Chanillo(1982):

$0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, b \in BMO(\mathbb{R}^n)$

$$I_{\alpha,b} : L^p \to L^q$$

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{ b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx < \infty \right\}$$

Para el caso clásico $V = 0$:

$$I_{\alpha,b}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy.$$

**Sin pesos**

Chanillo(1982):

$0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \; b \in BMO(\mathbb{R}^n)$

$$I_{\alpha,b} : L^p \to L^q$$

$I_{\alpha,b}$ no es del tipo débil $(1, \frac{n}{n-\alpha})$ para $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.
Para $n = 1, 0 < \alpha < 1$, $b(x) = \log|1 + x| \in BMO(\mathbb{R}), f = \delta$, la función Delta de Dirac sobre $\mathbb{R}$ en el origen.

Ding Yong - Lu Shanzhen - Zhang Pu (2001); D.Cruz Uribe y A. Fiorenza (2003):

Por diferentes métodos que $I_{\alpha,b}$ verifica una desigualdad tipo débil $L\log L$;

Sea $b \in BMO(\mathbb{R}^n), 0 < \alpha < n$, $B(t) = t\log(e+t)$, $\psi(t) = \left[t\log(e + t^{\frac{\alpha}{n}})\right]^{\frac{n}{n-\alpha}}$ entonces

$$|\{|I_{\alpha,b}f(x)| > t\}| \lesssim \psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{\|b\|_{BMO}|f|}{t}\right)\right)$$

## Con Pesos

Cruz Uribe et al (2003-2006-2015):

$0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, b \in BMO,$

$(w^q, w^{-p'}) \in A^{\alpha}_{p,q};$

$I_{\alpha,b} : L^p(w^p) \to L^q(w^q);$

## Con Pesos

Cruz Uribe et al (2003-2006-2015):

$0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $b \in BMO$,

$(w^q, w^{-p'}) \in A^{\alpha}_{p,q}$;

$I_{\alpha,b} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$;

$$A^{\alpha}_{p,q} : \frac{1}{|B|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p}} \mu(B)^{\frac{p}{q}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(B)^{p-1} \leq C$$

para toda $B \in \mathbb{R}^n$.

## Con Pesos

Cruz Uribe et al (2003-2006-2015):

$0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, b \in BMO,$

$(w^q, w^{-p'}) \in A^{\alpha}_{p,q};$

$I_{\alpha,b} : L^p(w^p) \to L^q(w^q);$

$$A^{\alpha}_{p,q} : \frac{1}{|B|^{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p}} \mu(B)^{\frac{p}{q}} \nu^{-\frac{1}{p-1}}(B)^{p-1} \leq C$$

para toda $B \in \mathbb{R}^n$. Para $\mu = w^q$, $\nu = w^p$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$

$$\left(\frac{w^q(B)}{|B|}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{w^{-p'}(B)}{|B|}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C$$

para toda $B \in \mathbb{R}^n$. Clase $A_{p,q}$.

D.Cruz Uribe - A.Fiorenza (2003).
Conjetura inicial para $p = 1$:

$$w\left(\left\{|I_{\alpha,b}f(x)| > t\right\}\right) \lesssim \psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{\|b\|_{BMO}|f|}{t}\right) w^{\frac{1}{q}}\right)$$

donde $w \in A_1$; $q = \frac{n}{n-\alpha}$.
$w \in A_1 : \frac{w(B)}{|B|} \sup_B w^{-1} \leq C, \quad \forall B \subset \mathbb{R}^n.$

D.Cruz Uribe - A.Fiorenza (2003).
Conjetura inicial para $p = 1$:

$$w\left(\{|I_{\alpha,b}f(x)| > t\}\right) \lesssim \psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{\|b\|_{BMO}|f|}{t}\right) w^{\frac{1}{q}}\right)$$

donde $w \in A_1$; $q = \frac{n}{n-\alpha}$.
$w \in A_1 : \frac{w(B)}{|B|} \sup_B w^{-1} \leq C, \quad \forall B \subset \mathbb{R}^n$.

D.Cruz Uribe - A.Fiorenza (2007):
$B, \psi$ como antes $\theta(t) = t^{1-\frac{\alpha}{n}} \log(e + t^{-\frac{\alpha}{n}}) = tB(t^{-\frac{\alpha}{n}})$,
$b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $w \in A_1$ luego:

$$w\left(\{|I_{\alpha,b}f(x)| > t\}\right) \lesssim \psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{\|b\|_{BMO}|f|}{t}\right)\theta(w)\right)$$

$$\mathcal{L} = -\Delta + V.$$

Localización: radio crítico

$$\rho(x) = \sup\{r > 0 : \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1\}, \; x \in \mathbb{R}^n$$

Z.Shen (1995); $0 < \rho(x) < \infty$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Bola crítica: $B(x, \rho(x))$.
Bola subcrítica: $B(x, r), r \leq \rho(x)$.

K.Kurata (2000):

Dado $N > 0$, existe una constante $C_N$:

$$k_t(x,y) \leq C_N t^{-n/2} e^{\frac{-|x-y|^2}{5t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}$$

K.Kurata (2000):

Dado $N > 0$, existe una constante $C_N$:

$$k_t(x,y) \leq C_N t^{-n/2} e^{\frac{-|x-y|^2}{5t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-N}$$

$$\mathcal{K}_\alpha(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

## Definición

*Bongioanni, Harboure, Salinas(2011):*
*Sea* $\theta \geq 0$,

$$BMO_\theta(\rho) = \left\{ b \in L^1_{loc} : \sup_B \frac{1}{\Psi(B)^\theta |B|} \int_B |b(x) - b_B| dx < \infty \right\}$$

$$\Psi(B) = \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right) ; \ B = B(x, r).$$

$$BMO_\infty(\rho) = \bigcup_{\theta \geq 0} BMO_\theta(\rho)$$

$$BMO \subsetneq BMO_\infty(\rho).$$

# Definición

*Clases de pesos asociados a* $\rho$.
*Bongioanni, Harboure, Salinas* (2011),
*Sea* $\theta \geq 0$; $w \in A_p^{\rho,\theta}$ $\forall B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\frac{w(B)}{|B|}\sup_B w^{-1} \leq C\Psi(B)^{\theta}; \quad p = 1.$$

$$\left(\frac{w(B)}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{w^{-\frac{1}{p-1}}}{|B|}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\Psi(B)^{\theta};\ p > 1.$$

$$A_p^{\rho,\infty} = \bigcup_{\theta\geq 0} A_p^{\rho,\theta}.\ A_\infty^{\rho,\infty} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{\rho,\infty},\quad A_\infty^{\rho,loc} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{\rho,loc}$$

# Definición

*Clases de pesos asociados a $\rho$.*
*Sean $1 \leq p, q < \infty$, $\theta \geq 0$. $w \in A_{p,q}^{\rho,\theta}$ :*

$$\left(\frac{\int_B w(y)^q dy}{|B|}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{\int_B w(y)^{-p'}}{|B|}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\Psi(B)^{\theta}; \quad p > 1.$$

$$\left(\frac{\int_B w(y)^q dy}{|B|}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_B w^{-1} \leq C\Psi(B)^{\theta}; \quad p = 1.$$

$$A_{p,q}^{\rho,\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_{p,q}^{\rho,\theta}.$$

- $A_{p,q} \subsetneq A_{p,q}^{\rho,\infty}$.
- $w \in A_{p,q}^{\rho,\theta} \Longleftrightarrow w^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}^{\rho,\infty}$.

# Definición

*Clases de pares de pesos asociados a* $\rho$

*Sean* $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $\theta \geq 0$.

$(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$;

$$\left(\frac{1}{|B|^{1-\alpha/n}}\right)^{p} \mu(B)^{\frac{p}{q}} \ \nu^{\frac{-1}{p-1}}(B)^{p-1} \leq C\Psi(B)^{\theta}; \quad p > 1.$$

$$\frac{\mu(B)^{\frac{1}{q}}}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \sup_{B} \nu^{-1}; \leq C\Psi(B)^{\theta}; \quad p = 1.$$

*para toda* $B = B(x,r) \in \mathbb{R}^n$, $\Psi(B) \doteq (1 + \frac{r}{\rho(x)})$.

*Definimos:* $A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_{p,q}^{\alpha,\rho,\theta}$

## Teorema

*Sea* $0 < \alpha < n$*,* $1 \leq p \leq q < \infty$*;* $(\mu, \nu)$*, par de pesos* $\mu \in A_{\infty}^{\rho,loc}$*,* $(\mu, \nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$

1. *Si* $1 < p \leq q < \infty$*, teniendo además que* $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\infty}^{\rho,loc}$*, se tiene que* $\mathcal{I}_{\alpha} : L^p(\nu) \to L^q(\mu)$*.*
2. *Si* $1 \leq p \leq q < \infty$*, entonces:*$\mathcal{I}_{\alpha} : L^p(\nu) \to L^{q,\infty}(\mu)$*.*

Desigualdades con dos pesos para $\mathcal{I}_{\alpha,b}$ para $1 < p \leq q < \infty$

Sean $0 < \alpha < n$, $b \in BMO_\infty(\rho)$,
$(\mu,\nu)$ par de pesos $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$, $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$;
$\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,\infty}$;

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)|^q \mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|b\|_{BMO(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Para el caso límite $p = 1$ con la metodología usada hasta el momento no salían resultados de acotación.....

Para el caso límite $p = 1$ con la metodología usada hasta el momento no salían resultados de acotación.....

Lin Tang (2015)
Desigualdades con un peso para $\mathcal{I}_{\alpha,b}$.

- Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$,$b \in BMO_\infty(\rho)$. $w \in A_{p,q}^{\rho,\infty}$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)|^q w(x)^q\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|b\|_{BMO_\infty(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Sean $0 < \alpha < n$, $B(t) = t\log(e+t)$, $b \in BMO_\infty^\rho$; $w \in A_1^{\rho,\infty}$;

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > t\}\right) \leq CB(B(\|b\|_{BMO_\infty^\rho}))$$
$$\psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\theta((w(x)))dx\right).$$

para toda $t > 0$.

$$\psi(t) = \left[t\log(e + t^{\frac{\alpha}{n}})\right]^{\frac{n}{n-\alpha}}, \theta(t) = t^{1-\frac{\alpha}{n}}\log(e + t^{-\frac{\alpha}{n}}).$$

# Teorema

*Desigualdades con dos pesos para* $\mathcal{I}_{\alpha,b}$.
*Sean* $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $b \in BMO_\infty(\rho)$, $(\mu, \nu)$ *par de pesos* $\mu \in A_\infty^{\rho,loc}$, $(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$;

- *Si* $p > 1$, $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,\infty}$;

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)|^q \mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|b\|_{BMO(\rho)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

- *Si* $p = 1$, $B(t) = t\log(e+t)$, $\Phi_0(t) = \frac{t}{\log(e+t)} \cong B^{-1}(t)$;

$$\mu\left(\{|\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| \geq t\}\right)^{\frac{1}{q}} \leq CB(B(\|b\|_{BMO_\infty^\rho})) \; B\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f|}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu)\right).$$

## Definición

*Sea B una función de Young, se define la función $h_B$ por:*

$$h_B(s) = \sup_{t>0} \frac{B(st)}{B(t)}; \quad 0 \leq s < \infty.$$

$B(t) = t\log(e+t)$ submultiplicativa $\Longrightarrow h_B \cong B$.

## Herramienta Principal: Desigualdad de tipo Fefferman-Stein

Operador Maximal Schrödinger;

$$\mathcal{M}_\eta(f)(x) \doteq \sup_{x\in B} \frac{1}{\Psi(B)^\eta |B|} \int_B |f(y)|dy$$

Operador Maximal Sharp Schrödinger;

$$\mathcal{M}_\eta^\sharp(f)(x) \doteq \sup_{x\in B(x_0,r);r<\rho(x_0)} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B|dy + \sup_{x\in B(x_0,r);r\geq\rho(x_0)} \frac{1}{\Psi(B)^\eta |B|} \int_B |f(y)|dy$$

Para $0 < \delta < 1$; $\mathcal{M}_{\delta,\eta} f = \mathcal{M}_\eta(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}$; $\mathcal{M}_{\delta,\eta}^\sharp f = \mathcal{M}_\eta^\sharp(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}$

- Desigualdad de Fefferman-Stein.
  Sean $0 < q, \eta < \infty$; $0 < \delta < 1$, $\mu \in A_{\infty}^{\rho,loc}$, $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ creciente y duplicante;

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{\delta,\eta}(f)(x)|^q \mu(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{\eta}^{\sharp}(f)(x)|^q \mu(x)dx;$$

$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

$$\sup_{\lambda>0} \phi(\lambda)\mu\left(\{\mathcal{M}_{\delta,\eta} f > \lambda\}\right) \leq C \sup_{\lambda>0} \phi(\lambda)\mu\left(\left\{\mathcal{M}_{\delta,\eta}^{\sharp} f > \lambda\right\}\right);$$

$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

- Lin Tang(2015):
  $b \in BMO_\infty(\rho)$, $0 < \alpha < n$, $\eta$ grande
  $2\delta < \epsilon < 1$

$$\mathcal{M}^{\sharp}_{\delta,\eta}(\mathcal{I}_{\alpha,b}f)(x) \leq C\|b\|_{BMO^{\rho}_{\infty}} \left(\mathcal{M}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x) + \mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x)\right)$$

$$\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)(x) = \sup_{x\in B}\Psi(B)^{-\eta}|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L\log L,B}$$

- Sean $0 < \eta < \infty$, $0 < \delta < 1$

$$\mathcal{M}^{\sharp}_{\epsilon,\eta}(\mathcal{I}_\alpha f)(x) \leq C\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) \quad c.t.x \in \mathbb{R}^n$$

- $1 < p \leq q < \infty$;

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_{\alpha,b} f|^q \mu \lesssim C \|b\|_{BMO_\theta(\rho)} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta} f)^q \mu$$

## Teorema

*Desigualdad con dos pesos para $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$.*
*Sea $0 \leq \alpha < n$, $\eta$ grande, $1 < p \leq q < \infty$.*
*Sea $(\mu,\nu)$ un par de pesos con $\sigma = \nu^{-\frac{1}{p-1}} \in A_\infty^{\rho,\infty}$.*
*Son equivalentes;*

$$\|\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}(f)\|_{L^q(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\nu)} \forall f \in L^p(\nu);$$

$$(\mu,\nu) \in A_{p,q}^{\alpha,\rho,\infty}$$

- Para $p = 1$; por homogeneidad para $t = 1$

$$\mu\left(\{|\mathcal{I}_{\alpha,b}f(x)| > 1\}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C\sup_{t>0}\phi(t)\mu\left(\left\{\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > \frac{t}{C\|b\|_{BMO_\theta(\rho)}}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

## Teorema

*Desigualdad Modular tipo débil con dos pesos para* $\mathcal{M}_{L\log L,\alpha,\eta}$.

*Dado* $\alpha$, $0 \leq \alpha < n$, $1 \leq q < \infty$;

$B(t) = t\log(e+t)$ $\Phi_0(t) = \frac{t}{\log(e+t)}(\cong B^{-1})$.

*Luego si* $(\mu,\nu) \in A_{1,q}^{\alpha,\rho,\infty}$, $\eta$ *grande para toda* $t > 0$

$$\mu\left(\{M_{L\log L,\alpha,\eta}f(x) > t\}\right)^{\frac{1}{q}} \leq CB\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f}{t}\right) h_{\Phi_0}(\nu)\right).$$

Muchas Gracias!!